

PII: S0017-9310(97)00320-7

Un modèle simplifié de transfert de chaleur et de masse dans le système sol–plante–atmosphère

MOHAMED SAIGHI

Institute de Physique, U.S.T.H.B., B.P. 32 El-Alia Bab Ezzouar 16111, Alger, Algérie

et

CHRISTIAN MOYNE

LEMMA-ENSEM, U.R.A.-C.N.R.S. 875, 2 Av. de la Forêt de Haye, B.P. 160-54504 Vandoeuvre cedex, France

(Reçu 28 juillet 1994 et sous forme finale 30 juillet 1997)

Abstract—Un modèle mathématique simplifié décrivant le transfert de l'eau dans le système sol–plante–atmosphère en régime variable (transitoire et périodique) est développé à l'aide d'une analogie électrique utilisant la méthode des quadripôles. A partir d'un schéma électrique équivalent du système, les équations de bilan sont résolues. Une première partie consacrée à l'étude du régime transitoire dans l'espace de Laplace permet d'obtenir l'évolution des flux et potentiels pour des temps "longs" à l'échelle de la saison. La deuxième partie traite du régime périodique à l'échelle de la journée à l'aide d'une analyse de Fourier. Une solution globale satisfaisante peut être obtenue en superposant les deux solutions précédentes. © 1998 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

1. INTRODUCTION

La compréhension et la description du transport de l'eau dans le système sol–plante–atmosphère ont beaucoup d'intérêt pour l'agronomie dans les régions arides et semi-arides.

A la lumière des travaux effectués dans ce domaine, il apparaît que l'étude de l'utilisation de l'eau par les plantes, en l'occurrence les palmiers de la région de Ghardaia, ne peut se faire qu'en intégrant simultanément les connaissances relatives au fonctionnement des trois types du maillon (le sol, la plante, l'atmosphère) dont les effets sur l'évapotranspiration sont naturellement très fortement interdépendants.

Le but de cette étude est donc de développer un modèle mathématique global simplifié pour décrire le continuum sol–plante–atmosphère dans le cas d'un régime variable.

Les principales hypothèses reposent d'une part sur une idéalisation du système (vaisseaux conducteurs assimilés à des tubes capillaires, surfaces d'échanges planes...) et d'autre part sur une linéarisation des équations de transport. Si la première hypothèse est bien entendue une nécessité, la seconde en revanche apparaît sans doute plus sévère pour ceux qui sont familiers avec la physique des sols. Néanmoins cette approche doit être comprise comme une première tentative de modélisation d'un système aussi complexe avec le souci d'obtenir une solution numérique simple qui dérite de façon approchée mais significative les phénomènes mis en jeu.

Deux problèmes ont pu être traités de manière similaire :

- Le régime transitoire avec condition initiale et utilisant les transformées de Laplace.
- Le régime périodique (à l'échelle de la journée) établi c'est-à-dire sans condition initiale en utilisant une analyse de Fourier.

On montrera que du point de vue pratique, la solution numérique du problème réel peut en bonne approximation être obtenue en superposant la solution transitoire et la solution périodique si toutefois, on se place à des temps suffisamment longs pour que l'établissement du régime périodique puisse être négligé.

Il faut cependant noter que la solution en Laplace donne des renseignements sur les évolutions des valeurs moyennes pour des temps longs, c'est-à-dire à l'échelle du mois ou de la saison, alors que le cas périodique permet surtout une description plus "fine" des principales grandeurs physiques caractérisant l'état physique du sol et de la plante pour une période (journée ou année).

2. MODELE

La plante et la surface du sol avec laquelle elle interagit sont représentées sur la Fig. 1. *OZ* est l'axe vertical ascendant, la cote $Z = 0$ correspond à la surface du sol. La nappe phréatique, les racines et les

NOMENCLATURE

a	albédo	R_N	rayonnement net par unité de surface [W m ⁻²]
A_{ij}	termes de la matrice de passage	R_p	résistance de la plante [s]
C	capacité hydrique du réservoir-plante [m ³ m ⁻¹]	R_r	résistance des racines [s]
C_h	capacité capillaire du sol [m s ⁻¹]	R_t	résistance des tiges [s]
D_h	diffusivité hydraulique [m ² s ⁻¹]	S	surface d'échange [m ²]
E	transpiration [m s ⁻¹]	t	temps [s]
H	pression motrice [m], [bar]	T_a	température de l'air ambiant [K]
h_c	coefficient d'échange convectif [W m ⁻² K ⁻¹]	T_F	température des feuilles [K]
H_c	densité de flux de chaleur sensible [W m ⁻²]	T_p	période [s]
h_r	humidité relative de l'air	z	abscisse [m].
k	conductivité hydraulique [m s ⁻¹]	Symboles grecs	
k_F	coefficient de transfert de masse [m s ⁻¹]	ϵ_s	émissivité
L	chaleur latente de vaporisation de l'eau [J kg ⁻¹]	θ	teneur volumique en eau [m ³ m ⁻³]
M	masse molaire de la vapeur d'eau [kg mole ⁻¹]	λ	coefficient de distance terre-soleil
p	variable de Laplace	ρ	masse volumique de l'eau [kg m ⁻³]
P_1	pression de l'eau du sol [Pa], [bar]	σ	constante de Stephan-Boltzmann [W m ⁻² K ⁻⁴]
P_v	pression de vapeur [Pa]	Ψ	pression capillaire de l'eau [m]
P_{vs}	pression de vapeur saturante [Pa]	Ψ_M	potentiel de flétrissement permanent de la plante [m]
q	densité surfacique de flux provenant du réservoir-plante [m s ⁻¹]	ω	pulsation [s ⁻¹].
$q_0(t)$	flux net à la surface du sol [m s ⁻¹]	Indices inférieurs	
R	constante des gaz parfaits [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	F	feuilles ou couvert végétal
r	résistance du réservoir-plante [s]	i	instant initial.
R_C	rayonnement atmosphérique par unité de surface [W m ⁻²]	n	nappe phréatique
R_F	résistance des feuilles [s]	p	plante
R_G	rayonnement global par unité de surface [W m ⁻²]	r	racines.

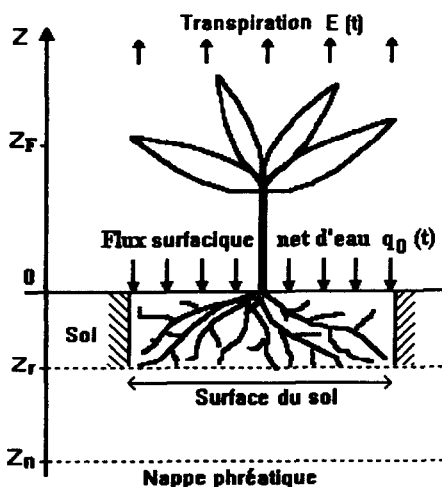


Fig. 1. Représentation du système sol-plante-atmosphère.

feuilles sont supposées être à des hauteurs moyennes respectives Z_n , Z_r et Z_F . La plante perd une densité

surfacique de flux d'eau $E(t)$ qui est fonction du temps : c'est la transpiration résultant de l'échange de chaleur et de masse entre les feuilles (essentiellement) et l'environnement. Elle dépend en grande partie du rayonnement net par unité de surface R_N , de la température et de l'humidité relative de l'air et enfin de la vitesse du vent. Les précipitations et l'évaporation donnent quant à elles une densité surfacique de flux d'eau net $q_0(t)$ à la surface du sol.

2.1. Sol

Si Ψ est la pression capillaire de l'eau, on a :

$$\Psi = (P_{atm} - P_1)/\rho g \quad (1)$$

où P_1 est la pression de l'eau dans le sol, P_{atm} la pression atmosphérique (qui est la pression de la phase gazeuse supposée uniforme), ρ la masse volumique de l'eau, g l'intensité de la gravité. La pression motrice H exprimée en hauteur d'eau est donnée par :

$$H = \Psi + z. \quad (2)$$

Le transport de l'eau par capillarité en milieu non saturé est gouverné par l'équation de Richards [1] qui s'écrit dans le cas unidirectionnel sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad (3)$$

où θ représente la fraction volumique en eau du sol, k la conductivité hydraulique du sol. En supposant la pression du gaz uniforme dans le sol et Ψ fonction de θ uniquement, la combinaison de équations (2) et (3) donne :

$$\frac{d\theta}{d\Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad (4)$$

où : $d\theta/d\Psi = C_h$ est la capacité capillaire du sol.

Dans cette étude, on considère que les propriétés physiques du sol (conductivité k et diffusivité $D_h = k/C_h$) sont constantes. Cette hypothèse n'est a priori valable que dans un très petit intervalle de teneur en eau. On admet également que l'écoulement liquide est le mode dominant dans les sols humides. La contribution de la diffusion de vapeur au mouvement global de l'eau est supposée négligeable dans la partie principale d'enracinement où les fluctuations diurnes de température sont faibles et par conséquent, le transfert d'humidité associé aux gradients de température est négligeable.

L'équation (4) peut s'écrire sous la forme de l'équation de diffusion de Fick :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = D_h \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \quad (5)$$

Nous supposons pour simplifier qu'à l'instant $t = 0$, le sol est en équilibre hydrostatique (c'est-à-dire $H = H^i = cte$). On note H^* la différence entre H la pression motrice dans la couche à la cote z à l'instant t et H^i la pression motrice d'équilibre à l'instant initial : $H^* = H - H^i$. Si $\bar{H}^* = \mathcal{L}(H - H^i)$ et $\bar{q} = \mathcal{L}(q)$ sont les transformées de Laplace de la pression motrice et de la densité surfacique de flux d'eau [$q = -k(\partial H/\partial z)$], l'équation (4) devient :

$$\frac{p}{D_h} \bar{H} = \frac{d^2 \bar{H}}{dz^2} \quad (6)$$

où p est la variable de Laplace; par commodité d'écriture nous noterons désormais H au lieu de H^* .

La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$H = K_1 \text{ch}(lz) + K_2 \text{sh}(lz) \quad \text{avec } l^2 = p/D_h.$$

L'expression de la densité surfacique de flux est :

$$\bar{q} = -k \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} = -kK_1 l \text{sh}(lz) - kK_2 l \text{ch}(lz).$$

La relation linéaire entre \bar{H}_1, \bar{q}_1 et \bar{H}_2, \bar{q}_2 en deux sections différentes $z = z_1$ et $z = z_2$ avec $e = z_1 - z_2$ s'écrit [2] :

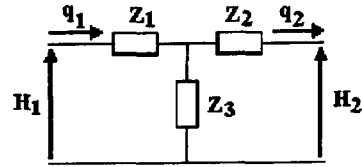


Fig. 2. Schéma du quadripôle.

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_2 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

avec $A_{11} = A_{22} = \text{ch}(le)$, $A_{12} = \text{sh}(le)/kl$, $A_{21} = kl \text{sh}(le)$. Ainsi en régime transitoire, la couche de sol d'épaisseur e peut être associée à un quadripôle dit passif ($A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$), qui peut être représenté par une association d'impédances en T (Fig. 2). avec

$$Z_1 = Z_2 = (A_{11} - 1)/A_{21} \quad Z_3 = 1/A_{21}.$$

Il est intéressant de retrouver les comportements aux temps longs de ces impédances. Le terme "temps longs" s'interprète comme $(D_h t/e^2) \gg 1$ ($D_h t/e^2$: nombre de Fourier relatif au transfert de matière) correspondant dans l'espace de Laplace à $pe^2/D_h \ll 1$.

Dans ce cas l'approximation du quadripôle est donnée par :

$$Z_1 = Z_2 = \frac{e}{2k} : \text{équivalent d'une résistance}$$

$$Z_3 = \frac{1}{eC_h p} : \text{équivalent d'une capacité.}$$

2.2. Plante

Selon le modèle proposé par Katerji *et al.* [3], il y a plusieurs résistances au mouvement de l'eau à l'intérieur de la plante. Les plus importantes sont la résistance racinaire R_r entre le sol et les racines et la résistance stomatique R_f des feuilles. De plus, la plante est capable de stocker de l'eau, c'est l'hypothèse du flux non conservatif et la mise en évidence de l'importance du réservoir-plante [3, 4].

Si nous admettons une relation linéaire entre le volume d'eau stockée V dans la plante et le potentiel de l'eau de la plante Ψ_p alors :

$$V = V_{\max} \left(1 - \frac{\Psi_p}{\Psi_M} \right) \quad (8)$$

où V_{\max} est la quantité d'eau maximum stockée par la plante quand elle est gorgée d'eau ($\Psi_p = 0$) et $\Psi_p > 0$ le potentiel correspondant au flétrissement permanent de la plante. Par conséquent, le flux d'eau Q provenant du réservoir-plante est donné par :

$$Q = -\frac{dV}{dt} = \frac{V_{\max}}{-\Psi_M} \left(-\frac{d\Psi_p}{dt} \right) = -C \left(\frac{d\Psi_p}{dt} \right) \quad (9)$$

avec

$$C = \frac{V_{\max}}{-\Psi_M}.$$

En passant à l'expression du flux surfacique q et après transformation dans l'espace de Laplace il vient :

$$\bar{q} = C(\Psi_p^i - p\bar{\Psi}_p) = -Cp\bar{H}_p \quad (10)$$

où Ψ_p^i est la valeur initiale de Ψ_p . Pour simplifier nous supposons ici que le système est initialement à l'équilibre.

La plante se comporte comme un réservoir de capacité $C = (V_{\max}/\Psi M)$ qui est reliée au circuit principal du flux surfacique d'eau par une résistance r .

2.3. Atmosphère

De nombreuses caractéristiques de l'atmosphère influent sur le comportement hydrique de la plante. Nous retiendrons entre autres :

- le rayonnement solaire net
- les précipitations
- l'humidité et la température de l'air
- la vitesse du vent.

3. BILANS

3.1. Bilan radiatif

La principale source d'énergie à la surface du sol est d'origine solaire. Le rayonnement net par unité de surface R_N du couvert végétal est le bilan des énergies radiatives reçues par le couvert végétal.

$$R_N = (1-a)R_G + \varepsilon_s R_C - \varepsilon_s \sigma T_F^4 \quad (11)$$

où R_G est le rayonnement global par unité de surface exprimé en $W m^{-2}$, il est composé du rayonnement direct et du rayonnement diffus. Pour une surface réceptrice horizontale, son expression est donnée par [5].

$$R_G = 0,271 \cdot I_0 \cdot \lambda \cdot \sin(h) + 0,706$$

$$\cdot I_0 \cdot \lambda \cdot A \cdot \exp\left(-\frac{B}{\sin(h)}\right) \quad (12)$$

avec $I_0 =$ constante solaire $= 1380 W m^{-2}$; λ est le coefficient sans dimension de distance terre-soleil dépendant du numéro du jour dans le mois et du numéro du mois dans l'année; h est la hauteur du soleil (angle de sa direction et du plan de l'horizon), dépendant de la position du soleil, de la latitude et variant avec l'angle horaire. A et B sont des coefficients appelés facteurs de trouble, ils dépendent de la clarté du ciel aux jour et lieu considérés. Ils ont été identifiés numériquement à partir des données météorologiques de la ville de Ghardaia.

$R_C = \sigma(T_a - 6)^4 = \sigma T_{\text{ciel}}^4$: rayonnement atmosphérique
 $\varepsilon_s \sigma T_F^4$ est le rayonnement propre du couvert.

3.2. Bilan énergétique

Une partie du rayonnement net R_N sert à vaporiser l'eau disponible à la surface du couvert végétal et donne naissance à un flux de chaleur latente LE , où E

est la transpiration à la surface du couvert végétal et L la chaleur latente de vaporisation de l'eau. Le reste est dissipé en chaleur dans l'air par convection (H_C flux de chaleur sensible) ou emmagasiné dans le sol (G flux de chaleur essentiellement conductif). D'après Saugier [6] et Hillel [7], une faible fraction de R_N , ne dépassant généralement pas 5%, est transformée en énergie chimique par la photosynthèse. Il est donc légitime de négliger la fraction du rayonnement net utilisée pour la photosynthèse par la végétation. L'équation du bilan d'énergie s'écrit alors :

$$R_N = LE + H_C + G. \quad (13)$$

Si on admet que dans le cas d'un couvert végétal $G \approx 0$ alors :

$$R_N = LE + H_C \quad (14)$$

avec

$$H_C = h_c(T_F - T_a)$$

et

$$E = \frac{k_F M}{RT_a} [P_{vs}(T_F) - P_v(T_a)]. \quad (15)$$

Le coefficient de transfert de chaleur convectif h_c ($W m^{-2} K^{-1}$) d'une plaque plane exposée au vent de vitesse V ($m s^{-1}$) est donné par [8] :

$$h_c = 5,7 + 3,8V.$$

T_F est la température de surface des feuilles. Le coefficient de transfert de masse convectif k_F est donné par :

$$k_F = 1/(R_S + R_E) = 1/R_F$$

où $R_F = R_S + R_E$ est la somme de la résistance stomatique et de la résistance de la couche limite massive pour la vapeur d'eau. Pour simplifier, nous appellerons $R_F = R_S + R_E$ la résistance de la feuille. Lynn et Carlson [9] donnent une revue des principales formulations de la résistance stomatique qui met en évidence une grande diversité sur le choix des facteurs qui l'affectent.

Saugier [6] donne les valeurs moyennes de ces deux résistances dans le cas d'une feuille de graminée, il montre que R_E est négligeable devant R_S .

La pression de vapeur saturante (exprimée en Pa) à la température T (K) est donnée par :

$$P_{vs}(T) = \exp\left(25,5058 - \frac{5204,9}{T}\right). \quad (16)$$

D'autre part :

$$P_v(T_a) = h_t \cdot P_{vs}(T_a).$$

Le bilan énergétique s'écrit finalement :

$$(1-a)R_G + \varepsilon_s \sigma(T_a - 6)^4 - \varepsilon_s \delta T_F^4 - h_c(T_F - T_a) = \frac{k_F LM}{RT_a} [P_{vs}(T_F) - P_v(T_a)]. \quad (17)$$

Cette équation permet de calculer la température foliaire T_F à chaque instant de la journée en fonction des données horaires tabulées des grandeurs suivantes :

- le rayonnement net par unité de surface
- la température T_a de l'air ambiant
- l'humidité relative moyenne de l'air
- la vitesse du vent
- la résistance stomatique

La résolution de cette équation a été effectuée par une méthode de dichotomie. La valeur de la température foliaire T_F calculée à chaque instant nous permet d'accéder à la densité surfacique de flux d'eau évaporé par la plante (ou couvert végétal), c'est la transpiration $E(t)$.

$$E(t) = \frac{R_N - H_c}{L} = \frac{k_F M}{RT_a} [P_{vs}(T_F) - P_v(T_a)]. \quad (18)$$

Les courbes de la Fig. 3 représentent un exemple de la variation journalière des densités de flux énergétiques (en $W\ m^{-2}$) : rayonnement net, densité de flux de chaleur sensible et densité de flux de chaleur latente, calculés à partir des données météorologiques (rayonnements direct et global, température et humidité relative de l'air etc. . . .) du mois d'avril de l'année 1991 de la ville de Ghardaia (oasis du sud algérien). Elles sont analogues à celles obtenues par Perrier [10].

4. FORMULATION DES EQUATIONS

La transpiration $E(t)$, qui constitue une donnée importante dans notre étude est une fonction tabulée qui présente une période $T_p = 24$ heures. Elle peut donc être développée en une série de Fourier sous la forme :

$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T_p}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{T_p}t\right) \right\}. \quad (19)$$

Un algorithme mathématique nous a permis de calculer les coefficients de Fourier a_0 , a_n et b_n correspondant à ce développement. La Fig. 4 montre qu'il suffit de quatre harmoniques pour obtenir une approximation tout à fait satisfaisante de la transpiration. La transpiration s'exprime désormais comme la somme d'une partie moyenne sur une période $a_0/2$ et d'une partie fluctuante correspondant aux différents harmoniques.

Notons que le flux d'eau $q_0(t)$ à la surface du sol qui est une autre donnée du problème (les précipitations par exemple) peut être également décomposé en série de Fourier.

L'idée originale est de traiter séparément la partie moyenne et la partie fluctuante. La première fera l'objet d'une étude en régime transitoire à l'aide de la transformation de Laplace, la seconde sera étudiée en régime périodique où chaque variable peut être écrite sous la forme $f = f_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Une bonne approximation de la solution générale du problème sera obtenue en superposant les solutions des deux régimes considérés.

Le schéma électrique équivalent du système sol–plante–atmosphère représenté en Laplace est montré sur la Fig. 5. Il est composé de l'association de trois quadripôles. Le premier représente la tranche du sol allant de la surface jusqu'aux racines de la plante, le deuxième correspond à la tranche du sol allant des extrémités des racines jusqu'à la nappe phréatique et enfin le troisième représente le schéma électrique équivalent de la plante allant des extrémités des racines jusqu'au couvert végétal. On voit apparaître

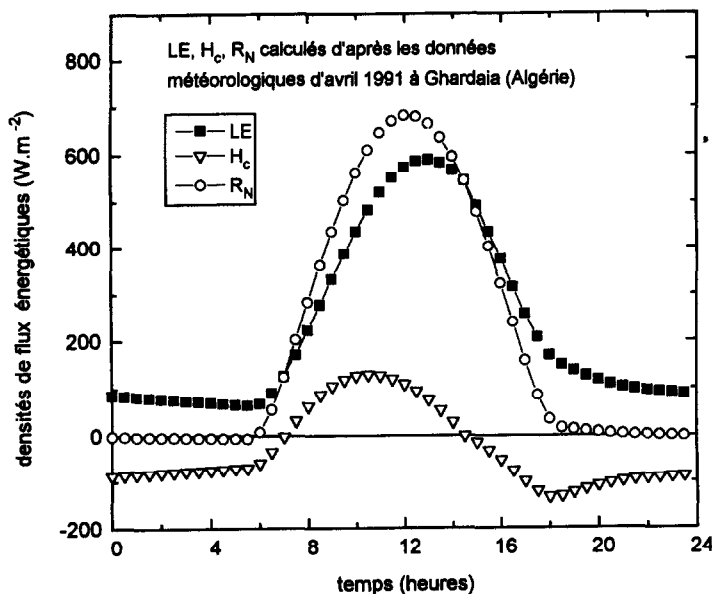


Fig. 3. Variation diurne des densités de flux énergétiques R_N , H_c , LE le mois d'avril 1991 dans la région de Ghardaia (oasis algérienne).

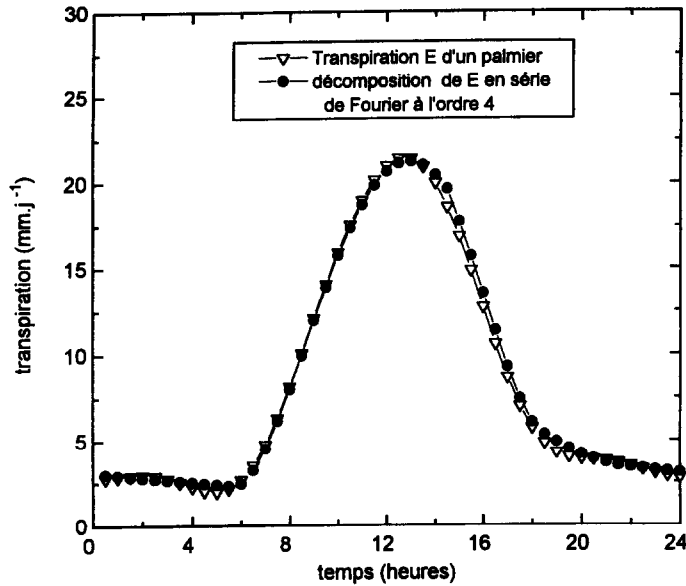


Fig. 4. Décomposition en série de Fourier à l'ordre 4 de la transpiration d'un palmier.

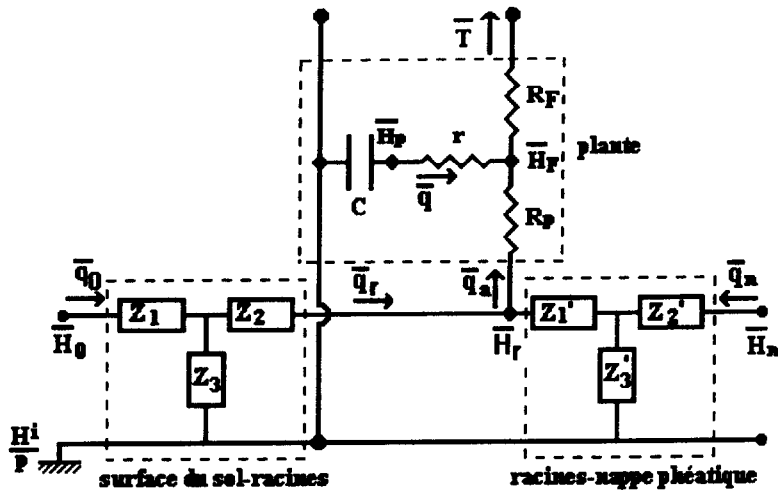


Fig. 5. Schéma électrique équivalent du système sol-plante-atmosphère.

également la capacité hydrique du réservoir-plante qui est reliée au circuit principal par une résistance r .

Nous allons nous attacher dans ce qui suit à l'écriture des équations résultant du schéma électrique équivalent du système en variable de Laplace.

4.1. *Système surface du sol-racines*

En supposant que les extrémités des racines sont à une profondeur moyenne e_1 de la surface du sol, le système (7) écrit précédemment devient :

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= \bar{q}_r \operatorname{ch}(le_1) + \bar{H}_r kl \operatorname{sh}(le_1) \\ \bar{H}_0 &= \bar{q}_r \frac{\operatorname{sh}(le_1)}{kl} + \bar{H}_r \operatorname{ch}(le_1). \end{aligned} \quad (20)$$

\bar{q} et \bar{H} qui apparaissent ici sont les valeurs moyennes des grandeurs correspondantes sur une période (journée).

4.2. *Système racines-nappe phréatique*

Si la nappe phréatique est à une distance e_2 des extrémités des racines, le système d'équations résultant est :

$$\begin{aligned} \bar{q}_n &= (\bar{q}_a - \bar{q}_r) \operatorname{ch}(le_2) + \bar{H}_r kl \operatorname{sh}(le_2) \\ \bar{H}_n &= (\bar{q}_a - \bar{q}_r) \frac{\operatorname{sh}(le_2)}{kl} + \bar{H}_r \operatorname{ch}(le_2). \end{aligned} \quad (21)$$

\bar{q}_n et \bar{H}_n sont respectivement la densité de flux provenant de la nappe phréatique et son potentiel. \bar{q}_a est la densité de flux cédée par le sol à la plante.

4.3. *Système racines-plante*

Le schéma électrique équivalent du continuum sol-plante-atmosphère représenté sur la Fig. 5 nous permet d'en déduire le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_r - \bar{H}_p + r\bar{q} - R_p\bar{q}_a &= 0 \\
 \bar{H}_r - \bar{H}_F - R_p\bar{q}_a &= 0 \\
 \bar{q} &= -C_p\bar{H}_p \\
 \bar{q} &= \bar{E} + \bar{q}_a
 \end{aligned} \quad (22)$$

où : $R_p = R_r + R_t$ est la résistance totale de la plante composée de la résistance racinaire R_r et de la résistance des tiges (ou tronc) R_t .

A partir de ces quatre équations, nous écrivons les expressions des grandeurs d'entrée, densité de flux cédée par le sol à la plante \bar{q}_a et potentiel du sol au niveau des racines \bar{H}_r , en fonction des grandeurs de sortie, transpiration foliaire \bar{E} et potentiel stomatique \bar{H}_F , sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{q}_a \\ \bar{H}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{C_p}{1+rC_p} \\ R_F & \frac{1+C_p(r+R_p)}{1+rC_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{H}_F \end{bmatrix} \quad (23)$$

Les systèmes d'équations établis précédemment c'est-à-dire (21), (22) et (23) peuvent être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & kl \cdot th(le_1) \\ -\frac{th(le_2)}{kl} & \frac{C_p}{1+rC_p} & \frac{th(le_2)}{kl} \\ 0 & \frac{1+C_p(r+R_p)}{1+rC_p} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_r \\ \bar{H}_F \\ \bar{H}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{q}_0}{ch(le_1)} \\ \frac{\bar{H}_n}{ch(le_2)} - \frac{th(le_2)}{kl} \cdot \bar{E} \\ \bar{E}R_p \end{bmatrix} \quad (24)$$

5. RESOLUTION ET INTERPRETATION DES RESULTATS

La résolution de ce système par la méthode de Gauss dans l'espace de Laplace nous a permis d'accéder à l'évolution de toutes les grandeurs physiques (densités de flux et potentiels) intervenant dans les processus d'échange à différents niveaux de la plante ou du sol. Le retour dans l'espace des réels est effectué par la méthode numérique de Stehfest [11].

5.1. Etude du régime transitoire

Nous présentons les courbes d'évolution des potentiels et des densités de flux d'eau en fonction du temps pour les différents paramètres qui caractérisent le système sol-plante : les propriétés physiques du sol (humidité relative, diffusivité et conductivité hydrauliques du sol) [12, 13], la profondeur de la nappe phréatique et le flux d'eau arrivant à la surface du sol soit par chute de pluie soit par irrigation artificielle d'une palmeraie de la région de Gahardaia. Par manque de données précises concernant la physiologie

du palmier dattier, nous avons utilisé les valeurs des résistances proposées par Dantas Antonino [14], Carlson et Lynn [4], Katerji et Perrier [15], Dubost [16] : $R_s = 160 \text{ s m}^{-1}$, $R_p = 432 \times 10^7 \text{ s}$, $r = 10^{10} \text{ s}$.

Les courbes des Fig. 6a et b ont été tracées pour un flux surfacique moyen $q_0 = 0,82 \text{ mm j}^{-1}$ à la surface du sol, une transpiration moyenne par unité de surface $E = 8,47 \text{ mm}^{-1}$, une teneur volumique en eau du sol $\theta = 35\%$ et une nappe phréatique à une profondeur de 10 m (où l'eau du sol est à la pression atmosphérique). Les potentiels de la feuille et du réservoir-plante chutent de façon très prononcée dans les dix premières heures et de façon beaucoup plus "douce" après (Fig. 6a). Ceci est bien entendu confirmé par l'évolution des densités de flux comme le montre la Fig. 6b. Cette chute brutale du potentiel du réservoir-plante signifie que ce dernier est sollicité dans les premières heures. Se vidant alors rapidement, c'est le sol humide environnant qui alimentera la plante en eau et deviendra la principale source d'eau pour satisfaire la demande climatique. Ceci est dû aux temps de réponse du sol qui sont beaucoup plus longs que ceux de la plante.

Les potentiels du sol (au niveau des racines et à la surface) restent identiques et ne varient que de 1 bar en 50 heures. Au-delà de 70 heures (environ trois jours) le flux surfacique q_n issu de la nappe phréatique alimente seul la plante, le flux q_r provenant de la tranche du sol au-dessus des racines est très faible. Après 200 heures (environ huit jours) les potentiels ne varient quasiment plus.

Les mêmes calculs ont été effectués pour une nappe phréatique située à 5 m. Nous comparons les évolutions des courbes relatives aux densités de flux (Fig. 7a) et celles relatives aux potentiels (Fig. 7b) pour deux profondeurs de la nappe phréatique : $e_2 = 10 \text{ m}$ et $e_2 = 5 \text{ m}$. Pour les deux cas considérés, si les densités de flux q_r provenant de la surface du sol sont quasi identiques (ce qui était prévisible), nous remarquons une différence notable entre les flux surfaciques provenant de la nappe q_n . En effet, pour $e_2 = 5 \text{ m}$, la nappe phréatique est rapidement mise à contribution ; ceci est mis en évidence par la variation importante du flux surfacique q_n dans les deux premiers jours. Pour un temps supérieur à trois jours, c'est la nappe phréatique qui régule les transferts et réhumidifie le sol avoisinant les racines d'où la valeur constante et relativement faible du potentiel.

Pour un sol moins humide ($\theta = 30\%$) et en absence de nappe phréatique (à une profondeur infinie), nous représentons sur les Fig. 8a et b respectivement les variations des densités de flux et des potentiels pour les différents niveaux du système. Le flux surfacique q_n étant nul, celui provenant du sol devient plus important. Pour assurer la demande climatique, la plante est contrainte de puiser l'eau dans ses propres organes ainsi que dans le sol avoisinant les racines et dessèche davantage ce dernier provoquant ainsi une variation très marquée des différents potentiels aussi bien dans la plante que dans le sol. En 50 heures (deux jours), le

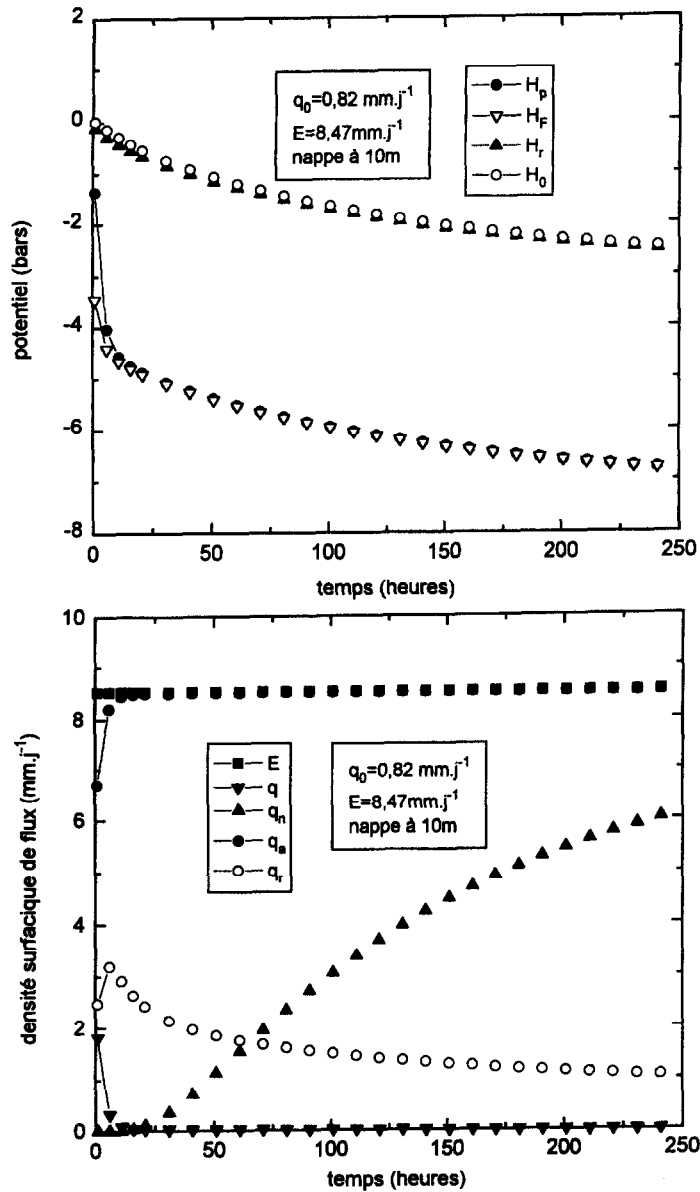


Fig. 6. (a) Evolution des potentiels au niveau de la surface du sol H_0 , des racines H_r , des feuilles H_F et réservoir- plante H_p , en régime transitoire pour $\theta = 35\%$. (b) Evolution des densités de flux au niveau des racines q_r et q_a , de la nappe q_n , du réservoir- plante q et de la transpiration pour $\theta = 35\%$.

potentiel des feuilles atteint la valeur du flétrissement permanent de la plante estimé par plusieurs auteurs entre -12 et -15 bars.

5.2. Etude du régime périodique

L'étude du régime périodique permet d'analyser le comportement du système sol-plante à l'échelle de la journée.

Chaque grandeur sera écrite sous la forme :

$$F = \bar{F} \cdot e^{i\omega t}$$

où \bar{F} est une grandeur complexe.

Pour chaque harmonique, on écrit l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = D_h \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

$$i\omega \bar{H} = D_h \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z^2} \tag{25}$$

L'équation de diffusion est donc analogue à celle écrite en Laplace à la différence que la variable de Laplace p est remplacée par $i\omega$.

Le système d'équations établi précédemment reste le même, il est résolu pour chaque harmonique. La solution sera la somme des solutions obtenues. Les Fig. 9a et b montrent les variations des potentiels et des flux d'eau durant une période (cycle journalier).

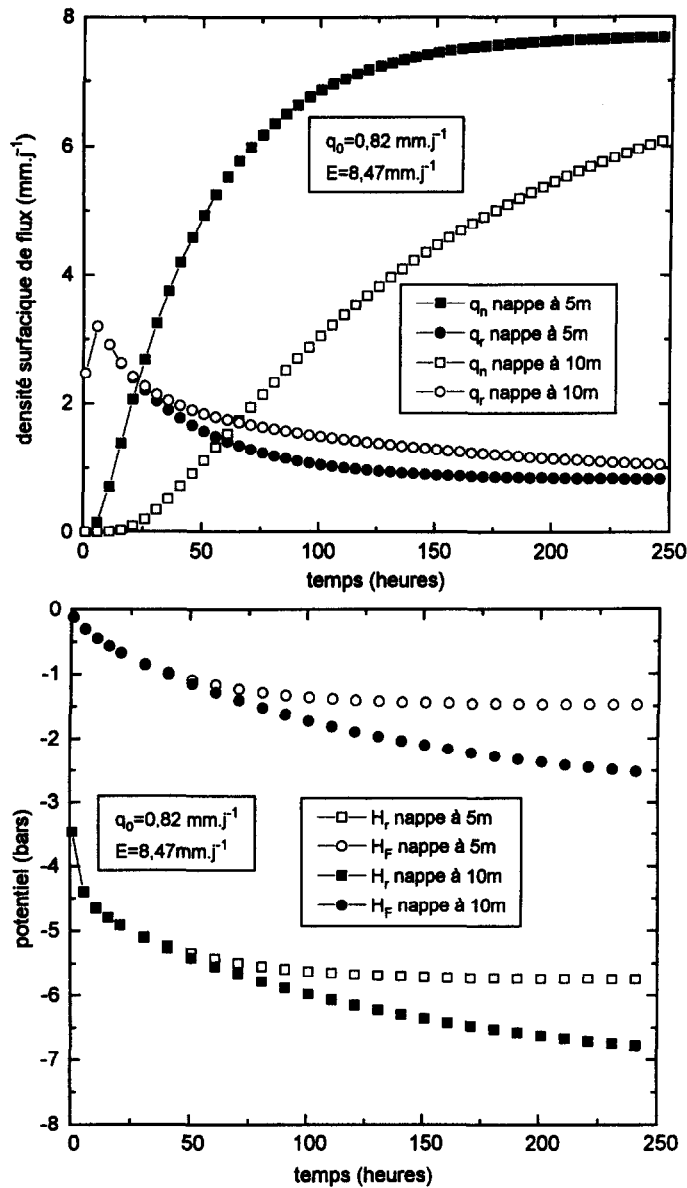


Fig. 7. (a) Comparaison des densités de flux pour deux profondeurs différentes: 10 et 5 m, avec $q_0 = 0,82 \text{ mm j}^{-1}$. (b) Comparaison des potentiels pour deux profondeurs différentes: 10 et 5 m, avec $q_0 = 0,82 \text{ mm j}^{-1}$.

Les potentiels du sol H_0 (en $z = 0$) et H_r (au niveau des racines) ne subissent aucune variation. En revanche, les potentiels du réservoir H_p et de la feuille H_F connaissent une variation notable et similaire avec un léger déphasage. Ces variations mettent en évidence les différentes phases caractéristiques de la journée:

- première phase: avant 6 h, les potentiels H_F et H_p respectivement du couvert végétal et du réservoir-plante sont sensiblement égaux, le flux surfacique q est quasiment nul, la transpiration E se confond avec l'absorption racinaire q_a .
- deuxième phase: de 6 h à 14 h, au cours de laquelle $H_p > H_F$, $q > 0$ et $E > q_a$. Cette phase met en évi-

dence la contribution du réservoir-plante qui cède son eau pour satisfaire la demande climatique (transpiration) devenant plus importante que l'absorption racinaire. Le flux racinaire est maximum à l'instant où le potentiel du couvert végétal passe par un minimum (13 h)

- troisième phase: de 14 h à 19 h au cours de laquelle $H_p < H_F$ et $q < 0$. Durant cette phase, le réservoir-plante se remplit de nouveau, l'absorption racinaire devenant plus importante que la transpiration, elle sert d'une part à assurer la demande climatique et d'autre part à réhydrater la plante (q négatif).

Ces résultats sont en parfait accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Katerji *et al.* [3]. L'im-

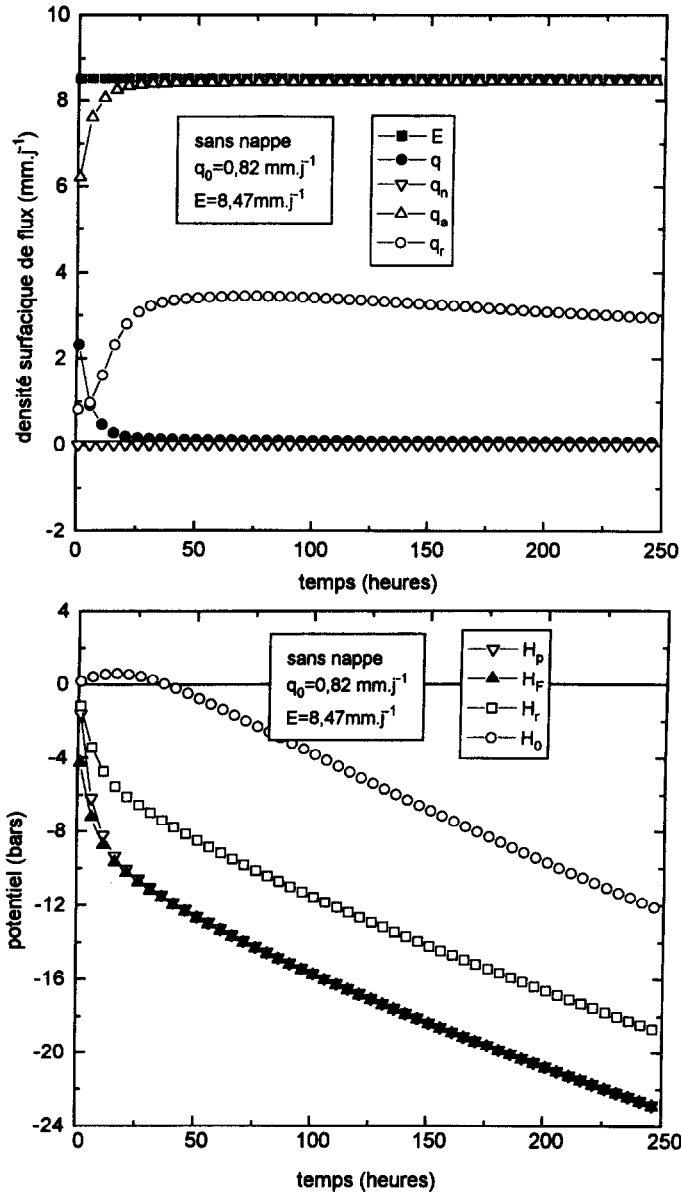


Fig. 8. (a) Courbes d'évolution des densités de flux pour $\theta = 35\%$, nappe préatique à l'infini et $q_0 = 0,82 \text{ mm j}^{-1}$. (b) Courbes d'évolution des potentiels pour $\theta = 35\%$, nappe phréatique à l'infini et $q_0 = 0,82 \text{ mm j}^{-1}$.

portance de la prise en compte du réservoir-plante apparaît lors du stress hydrique. En effet, quand une plante se flétrit, chaque organe (feuille, tige, racines) qui peut constituer un réservoir, subit des variations de teneur en eau provoquant une diminution de son potentiel et une réduction de diamètre. La réduction importante de diamètre de certains organes comme les racines peut entraîner une diminution du contact sol-racines et par conséquent provoquer une augmentation sensible de la résistance racinaire (sol-racines) qui peut avoir des conséquences importantes pour l'alimentation hydrique de la plante.

5.3. Etude du régime variable

L'étude du système sol-plante-atmosphère à l'échelle de la saison suppose la combinaison d'un régime périodique à l'échelle de la journée et de l'évolution aux temps longs évaluée à partir de l'analyse dans l'espace de Laplace.

Le système à résoudre étant linéaire, il est facile de voir que la solution du problème est la somme de trois termes :

$$H = H_L + H_F + H_{Cl} \tag{26}$$

où H_L est la solution calculée à l'aide de la transformée

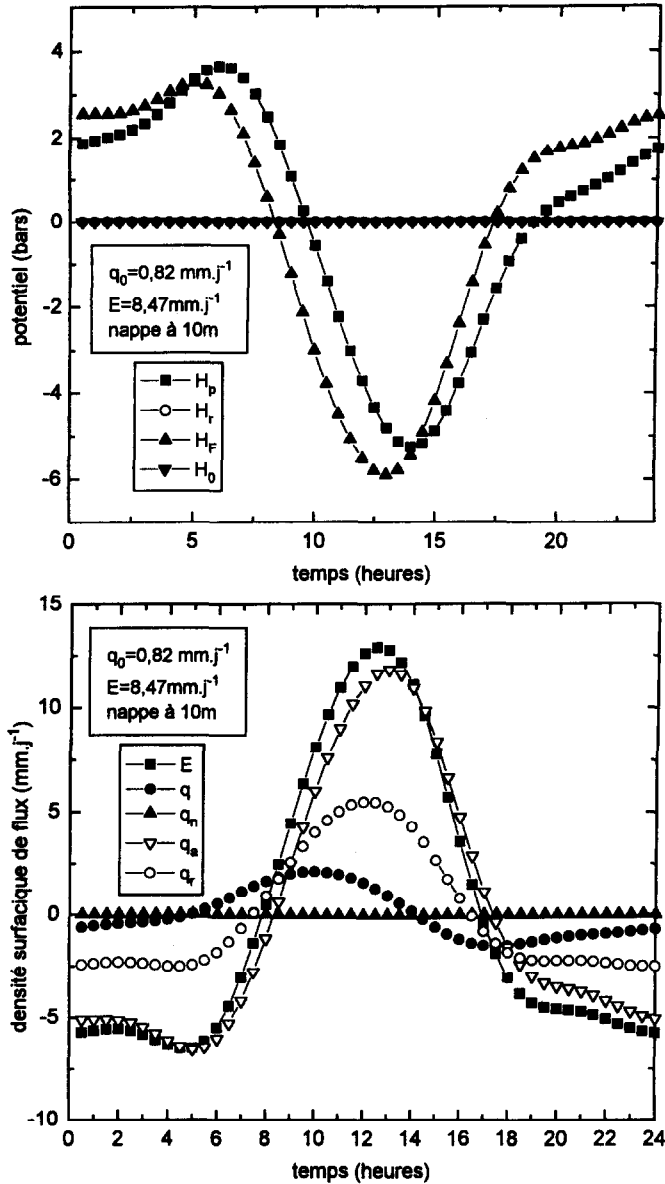


Fig. 9. (a) Variation diurne des potentiels en régime périodique pour $\theta = 35\%$, nappe phréatique à 10 m eq $q_0 = 0,82 \text{ mm.j}^{-1}$. (b) Variation diurne des densités de flux en régime périodique pour $\theta = 35\%$, nappe phréatique à 10 m et $q_0 = 0,82 \text{ mm.j}^{-1}$.

de Laplace, H_F la somme des solutions pour différents harmoniques par l'analyse de Fourier. H_{Cl} traduit quant à lui le temps nécessaire pour que le système (en fait essentiellement le sol dont la constante de temps est la plus grande) passe d'une répartition initiale d'humidité (a priori inconnue) à la répartition spatiale correspondant à celle du régime périodique établi calculé par H_F pour chaque harmonique.

La question qu'il est alors naturel de se poser est de savoir à quelle condition le potentiel H_{Cl} peut être négligé dans l'équation (26) et où le potentiel peut en bonne approximation être assimilé à la somme $H_L + H_F$.

Si l'on suppose (ce qui nous semble légitime et réaliste) que la répartition de l'humidité dans le sol en

début de saison de végétation est proche de l'équilibre (H uniforme en espace), il s'agit dès lors d'évaluer le temps d'établissement du régime périodique dans le sol.

Pour ce faire, calculons le temps de retour à l'équilibre d'un sol exposé à un régime périodique établi de pulsation ω et présentant (en négligeant l'amortissement spatial) des oscillations spatiales d'amplitude $L_\omega = 2\pi\sqrt{2D_h/\omega}$ et exposé à partir de l'instant initial à un flux surfacique nul. Pour une situation initiale en cosinus ($H_0 = \cos(2\pi x/L)$), la solution de l'équation de diffusion (5) peut s'écrire alors :

$$H = \exp\left(-4\pi^2 \frac{D_h t}{L_\omega^2}\right) \cos\left(2\pi \frac{z}{L_\omega}\right). \quad (27)$$

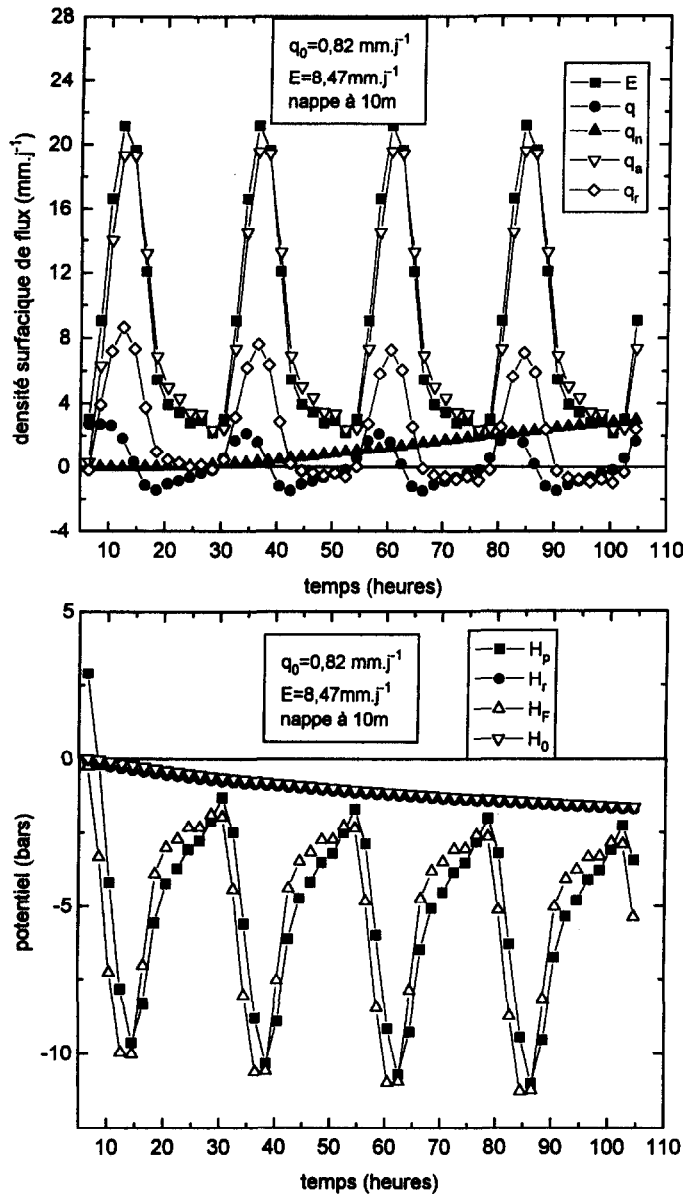


Fig. 10. (a) Variation des densités de flux en régimes transitoire et périodique pour $\theta = 35\%$, nappe phréatique à 10 m et $q_0 = 0.82 \text{ mm j}^{-1}$. (b) Variation des potentiels en régimes transitoire et périodique pour $\theta = 35\%$, nappe phréatique à 10 m et $q_0 = 0.82 \text{ mm j}^{-1}$.

On peut alors considérer que cette contribution est négligeable lorsqu'elle ne vaut plus que 10% du maximum, soit :

$$4\pi^2 \frac{D_h t}{L_\omega^2} = \ln(10) \text{ soit } t = \frac{\ln(10)}{\pi} \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = 0,73 T_p$$

où $T_p = 2\pi/\omega$ est la période.

Il est donc légitime d'assimiler la solution aux deux premiers termes uniquement, la "solution par Laplace" du problème à transpiration moyenne et la "solution par Fourier" du problème périodique sauf à vouloir analyser le problème à des échelles de temps inférieures à la journée.

A titre d'exemple les Fig. 10a et b approchent la

solution globale du problème par la superposition des régimes transitoire et périodique.

Un calcul plus rigoureux prenant en compte l'amortissement spatial dans un milieu semi-infini montre que le temps d'établissement du régime périodique dans le sol est atteint au bout de deux ou trois périodes, soit un ordre de grandeur légèrement supérieur au temps d'établissement calculé précédemment.

6. CONCLUSION

Un modèle simplifié décrivant le transfert hydrique dans le système sol-plante-atmosphère a été développé. Ce modèle repose sur une linéarisation

des équations de transport obtenues en supposant la conductivité et la diffusivité hydrauliques des sols constantes. Dans cette approche globale d'un problème pluridisciplinaire et complexe, les hypothèses considérées précédemment ont permis d'obtenir une solution particulièrement simple et rapide.

L'un des principaux avantages de cette modélisation est de pouvoir traiter séparément et de manière similaire le régime transitoire et le régime périodique. Le premier a fait l'objet d'une étude utilisant les transformées de Laplace, le retour dans l'espace réel s'effectue par la méthode numérique de Stehfest très facile à mettre en oeuvre.

L'étude du régime transitoire devient pertinente quand les échelles de temps sont importantes (saison ou année). Ainsi nous avons étudié différentes conditions aux limites (flux d'eau à la surface du sol, profondeur de la nappe phréatique, teneur volumique du sol...) dépendant de la saison.

La solution du régime périodique obtenue à l'aide d'une analyse de Fourier a permis d'étudier le comportement diurne du système.

Une solution globale est obtenue en superposant les deux solutions précédentes en prenant soin de se placer à des temps suffisamment longs pour que le régime périodique soit bien établi.

REFERENCES

1. Musy, A. et Soutter, M., *Physique du Sol*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1991.
2. Degiovanni, A. Conduction. *Techniques de l'ingénieur. Traité Généralités*, 1989, A 1530, 1–6.
3. Katerji, N., Hallaire, M., Menoux-Boyer, Y. et Durand, B., Modèle dynamique de circulation de l'eau dans la plante: vérification sur une culture de pomme de terre dans la région parisienne. *Etude sur les Transferts d'Eau dans le Système Sol–Plante–Atmosphère*. INRA, 1988.
4. Carlson, T. N. and Lynn, B., The effects of plant water storage on transpiration and radiometric surface temperature. *Agricultural and Forest Meteorology*, 1991 57, 171–186.
5. Chouard, P., Michel, H. et Simon, M. F., Bilan thermique d'une maison solaire, méthode de calcul rapide. EDF, 1977, Editions Eyrolles.
6. Saugier, B., Transports de CO₂ et de vapeur d'eau à l'interface végétation–atmosphère. Interaction du microclimat avec le comportement physiologique des plantes prairiales. Thèse d'état, université de Montpellier, 1974.
7. Hillel, D., *L'eau et le Sol. Principes et Processus Physiques*. Vander, Louvain, 1984.
8. Duffie, J. A. and Beckman, W. A., *Solar Energy. Thermal Processes*. John Wiley & Sons, New York, 1974.
9. Lynn, B. and Carlson, T. N., A stomatal resistance model illustration plant vs. external control of transpiration. *Agricultural and Forest Meteorology*, 1990, 52, 5–43.
10. Perrier, A., Echanges thermiques sol-atmosphère: Influence de la couverture végétale. Colloque. *Environnement Microclimatique et Habitat*. S.F.T. Reims, 1979.
11. Stehfest, H., Remark on algorithm 368. *Numerical Inversion of Laplace Transforms*. A.C.M., Vol. 53, 1970.
12. Coorevar, P., *Elements of Soil Physics*. Elsevier, Amsterdam, 1983.
13. Ten Berge, H. F. M., *Heat and Water Transfer in Bare Top Soil and the Lower Atmosphere*. Pudoc, Wageningen, 1990.
14. Dantas, A. C., Aantonino, Modélisation des transferts de masse et de chaleur dans le système sol–plante–atmosphère. Influence de la variabilité spatiale des caractéristiques hydrodynamique du sol. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1992.
15. Katerji, N. et Perrier, A., Détermination de la résistance globale d'un couvert végétal à la diffusion de vapeur d'eau et de ses différentes composantes. Approche théorique et vérification expérimentale sur une culture de luzerne. *Agricultural and Forest Meteorology*, 1985, 34, 105–120.
16. Dubost, D., Ecologie, aménagement et développement agricole des oasis algériennes. Thèse pour le Doctorat d'Université de Tours, 1991.

A NEW SIMPLIFIED MODEL OF HEAT AND MASS TRANSFER IN THE SOIL–PLANT–ATMOSPHERE SYSTEM

Abstract—A simplified mathematical model of the water transport in the soil–plant–atmosphere continuum system in unsteady state regime (transient and periodic) is built with the help of an electrical analogy which uses the quadripole method. From an electrical diagram of the system, the balance equations are solved. The first part is devoted to the study of unsteady state regime. The solution in the Laplace space leads to the flux and potential evolution for long times evolution (season). The second part treats the steady periodic regime (day) with the help of Fourier analysis. A satisfactory overall solution can be obtained by superposing both solutions. © 1998 Elsevier Science Ltd.